Rappels et compléments sur la dérivation

I. Rappels

1. Nombres dérivés et fonction dérivée

Définition

Soit f une fonction définie sur un intervalle I et $a \in$ I.

- f est **dérivable en a** si $\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$ admet une limite finie en quand h tend vers 0.
  Cette limite est appelé **nombre dérivé de f en a** et on la note $f'(a)$.
  Ainsi,
  $$f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$
- f est **dérivable sur I** si f est dérivable en tout nombre réel x de I.
  La **fonction dérivée** de f, notée f', est la fonction qui, à tout x de I, associe le nombre $f'(x)$.

2. Opération sur les fonctions dérivées

Propriété

$f(x) =$	$f'(x) =$	*f est dérivable sur*
k (constante)		$\mathbb{R}$
x		$\mathbb{R}$
x^n (n $\in \mathbb{N}$)		$\mathbb{R}$
$\frac{1}{x}$		$\mathbb{R}^*$
$\frac{1}{x^n}$		$\mathbb{R}^*$
$\sqrt{x}$		$]0; +\infty[$
e^x		$\mathbb{R}$

Propriété

Soit u et v deux fonctions dérivables sur un intervalle I.

- La fonction $u + v$ est dérivable sur I et $(u+v)' =$ .....
- La fonction $k \times u$ (avec $k \in \mathbb{R}$) est dérivable sur I et $(k \times u)' =$ .....
- La fonction $u \times v$ est dérivable sur I et $(u \times v)' =$ .....

Si, pour tout $x \in I$, $v(x) \neq 0$ alors :

- la fonction $\frac{1}{v}$ est dérivable sur I et $\left(\frac{1}{v}\right)' =$ .....
- la fonction $\frac{u}{v}$ est dérivable sur I et $\left(\frac{u}{v}\right)' =$ .....

II. Nouvelles formules de dérivation

1. Fonctions composées

Définition

Soit u et v deux fonctions d'ensemble de définition respectifs $\mathfrak{D}_u$ et $\mathfrak{D}_v$.
La composée de u par v, notée $v \circ u$, est la fonction définie par

$$v \circ u(x) = v\big(u(x)\big)$$

que l'on peut schématiser de la façon suivante :

$$v \circ u : x \xmapsto{u} u(x) \xmapsto{v} v(u(x))$$

L'ensemble de définition de $v \circ u$ est l'ensemble des réels $x \in \mathfrak{D}_u$ tels que $u(x) \in \mathfrak{D}_v$.

▶ **Savoir-faire :** *Composer deux fonctions*

Soit u et v définies par $u(x) = 2x - 1$ et $v(x) = x^2$. Exprimer $v \circ u$ et $u \circ v$ en fonction de x.

$v \circ u(x) =$ .....

$u \circ v(x) =$ .....

Remarque : *En général, $v \circ u(x) \neq u \circ v(x)$*

2. Dérivée d'une fonction composée

Propriété

Soit u et v deux fonctions telles que pour tout $x \in \mathfrak{D}_u$ on a $u(x) \in \mathfrak{D}_v$.
Si u est dérivable sur $\mathfrak{D}_u$ et v est dérivable sur $\mathfrak{D}_v$ alors $v \circ u$ est dérivable sur $\mathfrak{D}_u$ et on a :

$$\boldsymbol{(v \circ u)'(x) = v'\big(u(x)\big) \times u'(x)}$$

▶ **Savoir-faire :** *Déterminer la dérivée d'une fonction composée*

Soit f définie par $f(x) = (4x - 5)^3$.

.....

.....

.....

Conséquences

Soit u une fonction dérivable sur un intervalle I, et $n \in \mathbb{Z}^*$.

★ Si $f(x) = \sqrt{u}$ $(avec\ u(x) > 0)$ alors $f'(x) =$ .....

★ Si $f(x) = u^n$ $(avec\ u(x) \neq 0\ si\ n \leq -1)$ alors $f'(x) =$ .....

★ Si $f(x) = e^u$ alors $f'(x) =$ .....

III. Application à l'étude de fonctions

Propriété
Soit f une fonction définie et dérivable sur I.
Si pour tout nombre réel x de I, $\boldsymbol{f'(x) \geq 0}$, alors f est .....
Si pour tout nombre réel x de I, $\boldsymbol{f'(x) \leq 0}$, alors f est .....
S'il existe $x_0 \in I$ tel que $\boldsymbol{f'(x_0) = 0}$ **et change de signe**, alors f admet .....

▶ *Savoir-faire : Etudier une fonction polynôme du troisième degré*

Étudier la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3 - 6x^2 - 15x + 34$.

.....

.....

.....

.....

.....

x	

▶ *Savoir-faire : Etudier une fonction rationnelle*

Étudier la fonction f définie sur $]-3;+\infty[$ par $f(x) = \dfrac{5x-6}{x+3}$

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

x	

▶ *Savoir-faire : Etudier une fonction exponentielle*

Étudie la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = (x+2)e^x$

.....

.....

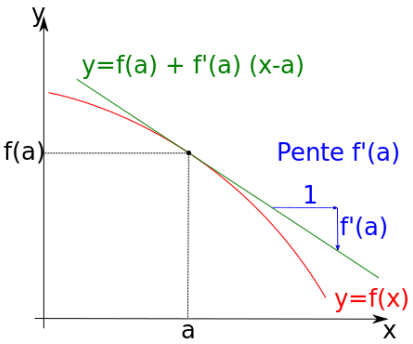
.....

.....

.....

x	

IV. Tangente à une courbe



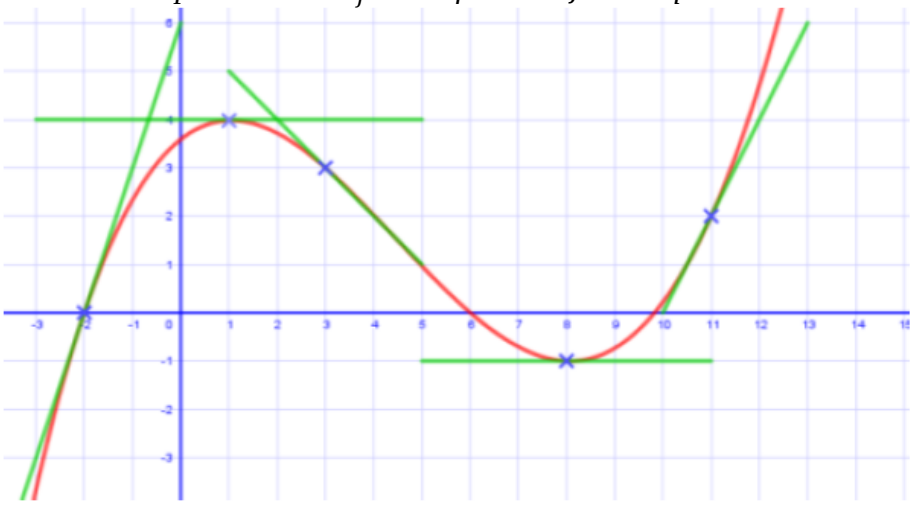
Définition

Soit f une fonction dérivable en a et A le point de C_f de coordonnées $A(a; f(a))$.

La tangente à la courbe C_f au point A est la droite passant par A et qui a pour coefficient directeur .....

▶ *Savoir-faire : Déterminer un nombre dérivé par lecture graphique*

On donne ci-contre la courbe représentative C_f d'une fonction f ainsi que certaines de ses tangentes.



Déterminer $f(-2)$; $f(1)$; $f(3)$; $f(8)$ *et* $f(11)$.

.....

.....

Déterminer $f'(-2)$; $f'(1)$; $f'(3)$; $f'(8)$ *et* $f'(11)$.

.....

.....

.....

Propriété

Si f est dérivable en a, la courbe C_f admet au point $A(a; f(a))$ une tangente T_A.

Alors T_A a pour équation .....

▶ *Savoir-faire : Déterminer l'équation d'une tangente*

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ *par* $f(x) = x^2 + 3x - 1$.
Déterminer une équation de la tangente à C_f *au point A de la courbe d'abscisse 2.*

.....

.....

.....